Aula 14

Teorema: Considere-se o problema de Cauchy para a EDO separável

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{f(y)}, \qquad y(t_0) = y_0,$$

com g, f funções reais contínuas em vizinhanças, respetivamente, de t_0 e y_0, com $f(y_0) \neq 0$.
Então existe solução única $y :]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\to \mathbb{R}$, para algum $\varepsilon > 0$, a qual é dada implicitamente por

$$F(y) = F(y_0) + \int_{t_0}^{t} g(s)ds, \qquad \text{com } F(y) = \int f(y)dy.$$

Equações Diferenciais Ordinárias Escalares de 1ª Ordem **Exatas**

Definição: Diz-se que uma equação diferencial ordinária escalar, de primeira ordem

$$M(t,y) + N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0,$$

é **exata** se existe $\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$M(t,y) = \frac{\partial \phi}{\partial t}, \qquad N(t,y) = \frac{\partial \phi}{\partial y},$$

ou seja, se e só se o campo $(M(t,y), N(t,y))$ é um campo gradiente (ou conservativo). Nesse caso, a solução geral é dada implicitamente por

$$\phi(t,y) = c, \qquad c \in \mathbb{R},$$

garantindo existência e unicidade local, na vizinhança duma condição inicial $y(t_0) = y_0$, pelo teorema da função implícita, se $\frac{\partial \phi}{\partial y}(t_0, y_0) = N(t_0, y_0) \neq 0$.

Proposição: Considere-se uma equação diferencial ordinária escalar, de primeira ordem

$$M(t,y) + N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0,$$

com $M, N : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(\Omega)$. Então:

- é condição necessária para ser exata que o campo $(M(t,y), N(t,y))$ seja fechado em Ω, ou seja, que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

- é condição suficiente para ser exata que o domínio Ω seja simplesmente conexo e o campo $(M(t,y), N(t,y))$ seja fechado em Ω.

Equações Diferenciais Ordinárias Escalares de 1ª Ordem **Redutíveis a Exatas**

Definição: Diz-se que uma equação diferencial ordinária escalar, de primeira ordem

$$M(t,y) + N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0,$$

com $M, N : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(\Omega)$ num conjunto simplesmente conexo Ω é **redutível a exata** se existe $\mu : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial t} N + \mu \frac{\partial N}{\partial t},$$

ou seja, se e só se o campo $(\mu(t,y)M(t,y), \mu(t,y)N(t,y))$ é um campo gradiente (ou conservativo).
Quando tal função μ existe, denomina-se **fator integrante**.

Proposição: Dada uma equação diferencial ordinária escalar, de primeira ordem

$$M(t,y) + N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0,$$

com $M, N : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(\Omega)$ num conjunto simplesmente conexo Ω é **redutível a exata** com

- Fator integrante $\mu = \mu(y)$ se $(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y})/M$ é apenas função de y. Nesse caso, obtém-se o fator integrante pela solução da EDO (em y)

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}\mu.$$

- Fator integrante $\mu = \mu(t)$ se $(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t})/N$ é apenas função de t. Nesse caso, obtém-se o fator integrante pela solução da EDO (em t)

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}\mu.$$